ҒТАМР 30.15.35

А.Т. Жақаш[1],
Р.Ж. Абдраимов[2], Э.А. Джакашова[3] ©

[1]Техн. ғылым. канд., доцент, [2]Магистрант, [3]Аға оқытушы

М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті

Тараз қ., Қазақстан Республикасы

@ *[1]zhakash58@mail.ru*

ГОЛОНОМДЫ БАЙЛАНЫСТАҒЫ МЕХАНИЗМДЕР ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ ТЕҢДЕУЛЕРІ

Аннотация. Жалпы, механизмдердің қозғалысын қарастырғанда, оларға кинематикалық және күштік талдау жасағанда оларда болатын жетекші немесе бастапқы тиектің қозғалыс заңдылықтарын білу, атап айтқнда жалпылама координаттардың уақытқа тәуелділігін білу өте маңызды. Жұмыста бұл тәуелділіктер динамиканың екінші есебінен, яғни әсер етуші күштерді біле отырып, қозғалыс заңдылықтарын анықтаудан шығарылды.

Тірек сөздер: механизмдер, голономды байланыстар, механизмдердің еркіндік дәрежесі, кинетикалық энергия, инерциялық момент, келтірілген масса, келтірілген күштер, Лагранждің екінші ретті теңдеуі.

Жақаш, А.Т. Голономды байланыстағы механизмдер қозғалысының теңдеулері [Мәтін] / А.Т. Жақаш, Р.Ж. Абдраимов, Э.А. Джакашова // Механика және технологиялар / Ғылыми журнал. – 2021. – №1(71). – Б.111-116.

Механизм тиектеріне берілген күштердің әсер етуінен болатын бастапқы тиектің қозғалыс заңдылықтарын анықтауда механизмдер қозғалысының теңдеулерін қолданады. Голономды байланыстағы механизмдер қозғалысын өрнектейтін теңдеулердің саны, оның еркіндік дәрежесінің санына тең.

Механизмдер қозғалысының теңдеулері әртүрлі формада берілуі мүмкін. Егер еркіндік дәрежесі төмен, яғни бірге тең механизмдер үшін жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема негізінде құрған ыңғайлы болып келеді [1].

Бұл теорема бойынша механизм қозғалысының теңдеуінің интегралдық түрі келесі түрде өрнектеледі

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} Ti - \sum_{i=1}^{n} T_{i_0}, \qquad (1)$$

мұндағы n-механизмнің қозғалатын тиектерінің саны, A_i-сырттан әсер ететін күштердің жұмысы, T_i-тиектердің қарастырып отырған уақыт аралығындағы соңғы кезіндегі кинетикалық энергиясы, T_{i_0}-тиектің бастапқы кезіндегі кинетикалық энергиясы. (1)-ші теңдеуді механизм қозғалысының дифференциалдық теңдеулер интегралдау арқалы алуға болады, ал (1) теңдеуін механизм қозғалысың интегралдық түрдегі теңдеуі деп атайды.

(1) теңдеуі n тиектен тұратын жазық механизмдер үшін күрделі болып келеді. Себебі әр тиек үшін есептеулер жүргізіп, оларды қосып отыру керек. Сондықтан, еркіндік дәрежесі бірге тең жазық механизм үшін әр тиекке қатысты алдын ала қосу әрекеттерін жасап алсақ, жоғарыдағы теңдеуді оңай құруға болады. Ол үшін (1) теңдеуді соған пара-пар бір тиектің қозғалыс заңдылығымен ауыстыру арқылы іске асыруға болады. Ауыстырылатын тиектің жалпылама координатасы кез-келген уақытта механизмнің жалпылама координатасымен дәл келеді. Бірінші механизмнің бастапқы тиегі айналмалы қозғалыс жасайды деп қарастырайық. Онда (1) механизм қозғалысының теңдеуін соған пара-пар айналмалы қозғалыс жасайтын бір тиектің қозғалыс заңдылығымен алмастыруға болады және ол тиекті *келтіру тиегі* деп атаймыз. Оның айналу осіне қарағандағы инерциялық моментін J_k деп белгілейік және оны келтірілген инерциялық момент деп атайды. Келтіру тиегіне әсер ететін сыртқы күштер мен күш моменттерін бір келтірілген M_k моментімен алмастырамыз.

Барлық уақытта берілген қанағаттандыратын келтірілген инерциялық момент J_k мен келтірілген M_k моментінің шамаларын есептеуге болатынын көрсетейік. Яғни, бұл жағдайда келтіру тиегінің жалпылама координатасы берілген механизмнің жалпылама координатасына барлық уақытта сәйкес келеді.

Ол үшін келтірілген тиек қозғалысының теңдеуін интегралдық формада жазайық. Бұл жерде жалпылама координат φ_0 дан φ дейін, ал келтірілген инерциялық момент J_{k_0} ден J_k дейін өзгереді деп жазамыз.

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_k d\varphi = \frac{J_k \omega^2}{2} - \frac{J_{k_0} \omega_0^2}{2}, \tag{2}$$

мұндағы w-келтірілген тиектің бұрыштық жылдамдығы, ω_0-бастапқы бұрыштық жылдамдық. (1.3) және (1.4) теңдеулері өзара тепе-теңдікте болуы үшін келесі екі шарттың орындалуы қажет және жеткілікті

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_k d\varphi = \sum_{i=0}^{n} A_i \tag{3}$$

$$\frac{J_k \omega^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} T_i \tag{4}$$

Бұл жерде айта кету керек, егер (3) шарт орындалса, онда кез келген уақытта келесі теңдеуде орындалады, яғни

$$\frac{J_{k_0} \omega_0^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} T_{i_0}$$

(3) теңдеуден келтірілген күш моментін M_k табамыз, ал (4) келтірілген инерциалдық момент J_k таба аламыз:

$$M_k = \sum_{i=0}^{n} \left[F_i \frac{v_i}{\omega} \cos(F_i, \wedge v_i \right) + M_i \frac{\omega_i}{\omega}] \tag{5}$$

Есептелетін келтірілген моменттің таңбасы оңда терісте болуы мүмкін. Егер есептеу таңбасы теріс болса, онда келтірілген M_k моментінің бағыты бұрыштық жылдамдықтың бағытына қарсы.

Жүйенің келтірілген күшімен келтірілген массасы жоғарыдағы формулалар сияқты анықталады:

$$F_k = \sum_{i=1}^{n}\left[F_i \frac{v_i}{v}\cos(F_i\,,\hat{}\,v) + M_i \frac{\omega_i}{v}\right], \tag{6}$$

$$m_k = \sum_{i=1}^{n}[m_i \left(\frac{v_{s_i}}{v}\right)^2 + J_{s_i}(\frac{\omega_i}{v})^2]\ , \tag{7}$$

мұндағы v-бастапқы тиектің сызықты жылдамдығының шамасы.

Жалпы, механизмдердің динамикалық немесе математикалық моделін құру үшін келтіру нүктесі ретінде механизмнің кез-келген тиегінің нүктесін алуға болады. Сондықтан механизмнің келтірілген массасы деп берілген нүктеге түсіреміз. Бұл жағдайда бұл нүктенің кинетикалық энергиясы механизмдердің тиектерінің энергиясына тең болуы шарт. Олай болса, келтірілген күш деп, элементар жұмыстар теңдігінен шығатын, шартты түрде берілген нүктеге түсірілген күшті айтамыз.

Келтірілген масса айнымалы болуы мүмкін, егер жылдамдықтар қатынасы айнымалы шамалар болса, яғни тиектердің орыналасуына тәуелді болған жағдайда.

Енді кеңістік механизмдер үшін келтірілген күштер мен массалардың анықталу жолдарын қарастырайық. Ол үшін, кеңістікте қозғалыс жасайтын механизмдердің тиектерінің кинетикалық энергиясын анықтауға бастаған дұрыс. Алдын ала, айналмалы қозғалыс жасайтын тиектердің остерге және жазықтықтарға қарағандағы инерциялық моменттерін анықтау керек, яғни J_{x_i}, J_{y_i}, J_{z_i}-координаттар остеріне қарағандағы және $J_{x_iy_i}$, $J_{y_iz_i}$, $J_{z_ix_i}$-ортадан тепкіш инерциялық моменттерді.

Онда кез келген тиектің кинетикалық энергиясы:

$$T_i = \frac{1}{2}\left(m_i v_{s_i}^2 + J_{x_i}\omega_i^2 + J_{y_i}\omega_{y_i}^2 + J_{z_i}\right) - J_{x_iy_i}\omega_{x_i}\omega_{y_i} - -J_{y_iz_i}\omega_{y_i}\omega_{z_i} - J_{z_ix_i}\omega_z\omega_{x_i} \tag{8}$$

Бұл жерде айтап айту керек, ортадан тепкіш инерциялық моменттерді нольге айналтыратындай $x_iy_iz_i$ координаттар остерін таңдап алуға болады. Бұл шарт қанағаттандыратын координаттар осьтерін инерциялардың басты осьтері деп те атайды [2]. Келтіру тиегінің кинетикалық энергиясы мен барлық тиектердің кинетикалық энергияларының теңдігі шартынан және (8) формуланы ескере отырып, келтірілген инерциялық моментті таба аламыз

$$J_k = \sum_{i=1}^{n}[m_i \left(\frac{v_{s_i}}{\omega}\right)^2 + J_{x_i}\left(\frac{\omega_{x_i}}{\omega}\right)^2 + J_{y_i}\left(\frac{\omega_{y_i}}{\omega}\right)^2 + +J_{z_i}\,(\frac{\omega_{z_i}}{\omega})^2], \tag{9}$$

мұндағы ω-бастапқы немесе жетекші тиектің бұрыштық жылдамдығы.

Тура осылай жүйенің келтірілген массасын табамыз

$$m_k = \sum_{i=1}^{n}[m_i \left(\frac{v_{s_i}}{v}\right)^2 + J_{x_i}\left(\frac{\omega_{x_i}}{v}\right)^2 + J_{y_i}\left(\frac{\omega_{y_i}}{v}\right)^2 + J_{z_i}(\frac{\omega_{z_i}}{v})^2], \tag{10}$$

мұндағы v-түзу сызықты қозғалыстағы бастапқы тиектің жылдамдығы.

Келтірілген күштер моментінің шамалары келесі формуламен анықталады.

$$M_k = \sum_{i=1}^{n}[F_i \frac{v_i}{\omega}\cos(F_i,\hat{}\,v_i) + M_i \frac{\omega_i}{\omega}\cos(M_i,\hat{}\,\omega_i)], \tag{11}$$

мұндағы v_i-F_i күші түсетін нүктенің жылдамдығы, ω_i-кез келген тиектің бұрыштық жылдамдығы, M_i-тиектерге әсер ететін қос күштер моменттері. Тура осылай келтірілген күшті табамыз

$$F_k = \sum_{i=1}^{n}[F_i \frac{v_i}{v}\cos(F_i, \wedge v_i) + M_i \frac{\omega_i}{\omega}\cos(M_i, \wedge\omega_i)] \tag{12}$$

Кейбір жағдайларды, механизм қозғалысының теңдеуін интегралдық формадан емес дифференциалдық түрде қолданған ыңғайлы болуы мүмкін. Бұл теңдеуді кинетикалық энергия теңдеуінің дифференциалдық формасынан алуға болады, яғни

$$dA = dT \tag{13}$$

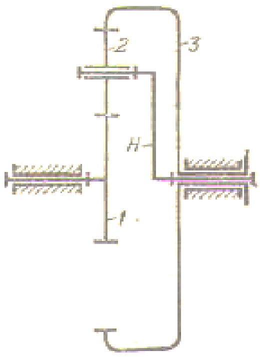
Еркіндік дәрежесі жоғары голономды байланыстағы механизмдер қозғалысының теңдеуін құру үшін негізінен Лагранждың 2-ші ретті теңдеуін қолданады [2].

Бұл жерде, жалпылама күштерді мүмкін орын ауыстыруларда анықтау үшін, жүйеге әсер ететін күштердің элементар жұмысының тепе-теңдік шарттарын қолданамыз. Механизмнің тиектеріне әсер ететін сыртқы күштердің мүмкін орын ауыстыруларда келесі түрде анықталады:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\delta q_i = \sum_{j=1}^{n}(F_{j_x}\delta x_j + F_{j_y}\delta y_j + F_{j_z}\delta z_j), \tag{14}$$

мұндағы F_{j_x}, F_{j_y}, F_{j_z}- x, y, z остеріне түсірілген сыртқы F_j күшінің проекциялары; δx; δy; δz;-күштердің түсу нүктесінің мүмкін орын ауыстыруларының проекциялары.

Еркіндік дәрежесі екіге тең келесі механизмнің қозғалыс теңдеуін құруды қарастырайық. Еркіндік дәрежесі екіге тең келесі тиісті механизмді қарастырайық (1-сурет).



Сурет 1. Тиісті дифференциалды механизм

Қарастырып отырған жазық тиісті механизм үшін Лагранждың 2-ші ретті теңдеуі келесі түрде өрнектеледі.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi_1} = M_{k_1}, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_H}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi_H} = M_{k_H}, \tag{16}$$

мұндағы φ_1, φ_H-1-ші жетекші H-тың бұрыштық бұрылулары, ω_1, ω_H-сол тиектердің бұрыштық жылдамдықтары, T-механизмнің жалпы кинетикалық энергиясы, M_{k_1}, M_{k_H}-жалпылама күштер. Оларды келтірілген моменттер депте айтуға болады.

Қарастырып отырған механизмнің кинетикалық энергиясы келесі түрде анықталады:

$$T = \frac{1}{2}(J_1\omega_1^2 + KJ_2\omega_2^2 + Km_2R_H\omega_H^2 + J_H\omega_H^2 + J_3\omega_3^2), \qquad (17)$$

мұндағы J_1, J_2, J_3, J_H-1, 2, 3, H тиектердің ауырлық орталары арқалы өтетін остерге қарағандағы инерциялық моменттері, K-сателлиттер саны, m_2-бір сателлиттің массасы, R_H-сателлиттің центрінің траекториясының радиусы.

Аралық тиек болатын 3-ші тиектің бұрыштық жылдамдығын беріліс қатынастары арқалы жалпылама жылдамдықтар ω_1 және ω_H арқалы өрнектеуге болады.

$$\omega_3 = U_{31}^{(H)} \cdot \omega_1 + U_{2H}^{(1)} \cdot \omega_H$$

Бұрыштық жылдамдық ω_2-де осылай өрнектеуге болады

$$\omega_2 = U_{21}^{(H)} \cdot \omega_1 + U_{2H}^{(1)} \cdot \omega_H$$

ω_2 мен ω_3 (2.6) теңдеуге қойып, келесі түрлендірілген кинетикалық энергияны аламыз:

$$2T = J_{11}\omega_1^2 + 2J_{1H}\omega_1\omega_H + J_{HH}\omega_H^2, \qquad (18)$$

мұндағы

$$J_{11} = J_1 + KJ_2[U_{21}^{(H)}]^2 + J_3[U_{31}^{(H)}]^2$$

$$J_{1H} = K \cdot J_2U_{21}^{(H)} \cdot U_{2H}^{(1)} + J_3U_{31}^{(H)} \cdot U_{3H}^{(1)},$$

$$J_{HH} = K \cdot J_2[U_{2H}^{(1)}]^2 + Km_2R_H^2 + J_H + J_3[U_{3H}^{(1)}]^2.$$

J_{11}, J_{1H}, J_{HH}-инерциялық моменттерін механикада инерциялық коэффиценттер деп атайды. Біз қарастырып отырған механизмде барлық инерциялық коэффиценттердің жалпыламалы координаттар φ_1 мен φ_H тәуелсіздігін атап айтуымыз керек. Осыдан

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_H} = 0 \qquad (19)$$

(19) теңдеуімен өрнектелетін кинетикалық энергиядан ω_1 және ω_H бойынша дербес туындыларын табайық

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_1} = \frac{1}{2}(2J_{11}\omega_1 + 2J_{1H}\omega_H + 0) = J_{11}\omega_1 + J_{1H}\omega_H,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_H} = \frac{1}{2}(2J_{1H}\omega_1 + 2J_{HH}\omega_H) = J_{1H}\omega_1 + J_{HH}\omega_H. \qquad (20)$$

(20) теңдеуін уақыт бойынша дифференциалдайық

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\right) = J_{11}\frac{d\omega_1}{dt} + J_{1H}\frac{d\omega_H}{dt} = J_{11}\varepsilon_1 + J_{1H}\varepsilon_H, \qquad (21)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_H}\right) = J_{1H}\frac{d\omega_1}{dt} + J_{HH}\frac{d\omega_H}{dt} = J_{11}\varepsilon_1 + J_{HH}\varepsilon_H, \qquad (22)$$

мұндағы ε_1, ε_H-1- ші және жетекші тиектерінің бұрыштық үзеулері.

Табылған (22), (20) өрнектерін (15-16) теңдеуіне қойсақ механизм қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін аламыз:

$$J_{11}\varepsilon_1 + J_{1H}\varepsilon_H = M_{k_1}, \qquad (23)$$

$$J_{1H}\varepsilon_1 + J_{HH}\varepsilon_H = M_{k_2}, \qquad (24)$$

(2.4) теңдеуіндегі келтірілген күш моменттері механизмге әсер ететін сыртқы күштердің жұмыстарының, сол күштердің элементарлық жұмыстары теңдігінің шарттарынан анықталады.

Әдебиеттер тізімі

1. Бабаков, И.М. Теория колебаний [Текст] / И.М. Бабаков. - М.: Наука, 1968. - 559 с.
2. Фролов, К.В. Теория механизм и машин [Текст] / К.В. Фролов [и др.]. - М.: Наука, 1984. - 493 с.

Материал редакцияға 13.03.21 түсті.

А.Т. Жақаш, Р.Ж. Абдраимов, Э.А. Джакашова

Таразский региональный университет им. М.Х. Дулати, г. Тараз, Казахстан

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ С ГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

Аннотация. Для кинематического и силового анализа необходимо знание законов движения начальных звеньев, т.е. зависимости обощенных координат от времени. Эти зависимости выведены в работе из решения второй задачи динамики.

Ключевые слова: механизмы, голономные связи, степень свободы механизма, кинетическая энергия, момент инерции, приведенные массы, приведенная сила, уравнение Лагранжа 2- го рода.

A.T. Zhakash, R.J. Abdraimov, E. Jakashova

Taraz Regional University named after M.Kh. Dulaty, Taraz, Kazakhstan

EQUATIONS OF MOTION OF MECHANISMS WITH VOICE CONNECTIONS

Abstract. For kinematic and force analysis, it is necessary to know the laws of motion of the initial links, i.e. dependence of the generalized coordinates on time. These dependencies are found from the solution of the second problem of dynamics.

Keywords: mechanisms, holonomic constraints, degree of freedom of a mechanism, kinetic energy, moment of inertia, reduced masses, reduced force, Lagrange equation of the second kind.

References

1. Babakov I.M. Theory of oscillations. - Moscow: Nauka. 1968. - 559 p.[in Russian].
2. Frolov K.V. The theory of mechanism and machines. - Moscow: Nauka, 1984. - 493 p. [in Russian].