ҒТАМР 30.15.35

А.Т. Жақаш[1],
Р.Ж. Абдраимов[2], Э.А. Джакашова[3] ©

[1]Техн. ғылым. канд., доцент, [2]Магистрант, [3]Аға оқытушы

М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті

Тараз қ., Қазақстан Республикасы

@ *[1]zhakash58@mail.ru*

ГОЛОНОМДЫ ЕМЕС БАЙЛАНЫСТАҒЫ МЕХАНИЗМДЕР ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ ТЕҢДЕУЛЕРІ

Аннотация. Голономды емес байланыстағы механизмдер қозғалысының математикалық моделін құру, голономды байланыстағы механизмдерге қарағанда күрделі болып келеді. Бұл теңдеулерді құру үшін Лагранждың белгілі теңдеуін қоладану келмейді. Соңдықтан, бұл жағдайда Лагранждың анықталмаған көбейткіштері арқылы берілетін теңдеуін қолдану қажет. Олардың жалпы теңдеуі еркіндік дәрежесінің санынан қандай да бір ретке көп болады.

Тірек сөздер: механизмдер, голономды емес байланыстар, механизмдердің еркіндік дәрежесі, кинетикалық энергия, инерциялық момент, келтірілген масса, келтірілген күштер, Лагранждің анықталмаған көбейткіштер түрінде берілген теңдеуілері.

Жақаш, А.Т. Голономды емес байланыстағы механизмдер қозғалысының теңдеулері [Мәтін] / А.Т. Жақаш, Р.Ж. Абдраимов, Э.А. Джакашова // Механика және технологиялар / Ғылыми журнал. – 2021. – №1(71). – Б.117-123.

Жалпылама координаттары s–ке тең механизм l идеалды және m голономды байланыста болсын және олар өзара жалпылама жылдамдықтармен сызықты қатынастармен берілсін, яғни

$$\sum_{i=1}^{s} A_{\sigma_i}\dot{q}_i + A_\partial = 0 \qquad (\sigma = 1,2,3,..,m) \tag{1}$$

A_{σ_i} коэффициенті барлық жалпылама координаттардан $\dot{q}_i$ және уақыт t тәуелді бола алады.

Механизмдердің құрлымы бойынша голономды емес байланыстағы механизмнің еркіндік дәрежесі W жалпылама координаттар санынан кем болады [1], яғни

$$W = s - m \tag{2}$$

Механизмнің қозғалысының теңдеуінің саны механизмнің еркіндік дәрежесіне тең деп есептейміз. Механизм қозғалысының теңдеуінен анықталатын жалпылама координаттар шартты түрде тәуелсіз деп есептейік. Қалған координаттар, яғни тәуелді координаттар голономды емес теңдеулерден таба аламыз.

Голономды емес байланыстағы механизмдер қозғалысының теңдеуін құру үшін Лагранждың екінші ретті теңдеуін қолдана алмаймыз. Ол үшін анықталмаған көбейткіштермен берілетін Лагранж теңдеуін қолдануға болады:

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_1 A_{1i} + \lambda_2 A_{2i} + \ldots + \lambda_m A_{m_i}, \tag{3}$$

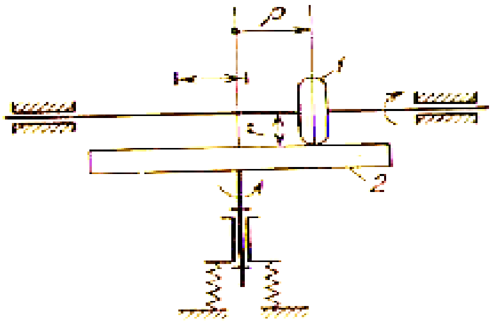
мұндағы $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_m$-анықталмаған көбейткіштер, $A_{1i}, A_{2i},..., A_{m_i}$-голономды емес байланыстар коэффициенттер.

(1) және (3) теңдеулердің жалпы теңдеулерінің саны $(s+m)$-ге тең.

Енді, осы жоғарыдағы теңдеулерді қолданып, келесі мысалды қарастырайық.

Сатылы емес фрикциялық механизм берілсін (1-сурет). Мұндағы 1 және 2 тиектердің бұрылу бұрыштары φ_1, φ_2 және ρ координаталар арасындағы дифференциалдық байланыс келесі теңдікпен берілсін.

$$r\dot{\varphi}_1 = \rho\dot{\varphi}_2 \qquad (4)$$



Сурет 1. Сатылы емес фрикциялық механизм

(4)-дифференциалды байланыс теңдеуі, бірақ ρ тұрақты беріліс қатынастары

$U_{21} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{r}{\rho}$.

Бұл жағдайда теңдеуді тура интегралдауға болады. Егер, бастапқы шарттар $t=0, \varphi_1=0, \varphi_2=0$ болса, интегралдаудан кейін келесі теңдікті аламыз $r\varphi_1 = \rho\varphi_2$.

Тұрақты беріліс қатынас жағдайында механизм тиектерінің орналасу жағдайы бір жалпылама координатамен анықталады, яғни жалпылама координат φ_1, ал механизмнің еркіндік дәрежесі бірге тең.

Енді ρ уақытқа тәуелді функция ретінде қарастырсақ. Онда U_{21} беріліс қатнасыда уақытқа тәуелді функция болып есептеліп, (4) байланыс теңдеуі келесі түрде өрнектеледі:

$$U_{21}(t)\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = 0 \qquad (4)$$

немесе дифференциалдық формада

$$U_{21}(t)d\dot{\varphi}_1 - d\dot{\varphi}_2 = 0 \qquad (5)$$

(5) теңдеуін бірден интегралдауға болмайды, сондықтан φ_1 және φ_2 араларындағы голономды емес байланыс береді.

Механизм тиектерінің орны U_{21} айнымалы беріліс қатынасы кезінде келесі үш ρ, φ_1 және φ_2 координаталарымен анықталады. Бірақ, механизмнің жалпылама координаттарының сан екіге тең, яғни φ_1 және φ_2б себебі біздің жағдайда ρ уақытқа тәуелді функция.

(4) байланыстар теңдеуі жалпылама координаттар санын азайта алмайды, себебі ол $\dot{\varphi}_1$ және $\dot{\varphi}_2$ жылдамдықтарына ғана тежеу қоя алады.

Қарастырып отырған механизміздің еркіндік дәрежесінің саны жалпылама координаттармен голономды емес байланыстар санының айырымына тең, яғни $W = 2 - 1 = 1$.

Олай болса, механизм қозғалысының теңдеулер саны бірге тең болу керек. Енді осы теңдеуді табудың жолын қарастырайық. Ол үшін, Лагранждың анықталмаған көбейткіштермен берілетін теңдеуін пайдаланамыз

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = M_1 + \lambda U_{21}, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = M_2 - \lambda,$$

мұндағы M_1, M_2-келтірілген күш моменттері.

Жүйенің кинетикалық энергиясын есептегенде айнымалы қозғалыс жайтын 1 және 2 тиектердің инерциялық моменттерін, яғни J_1 және J_2 тұрақты деп есептейік:

$$T = \frac{1}{2}(J_1\dot{\varphi}_1^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2) \quad (7)$$

(7) шаманы (6) теңдеулеріне қойып және голономды емес байланыстың теңдеуін ескере отырып белгісіз φ_1, φ_2 және λ анықтайтын келесі үш теңдеуді аламыз:

$$\begin{aligned} &J_1\ddot{\varphi}_1 = M_1 + \lambda U_{21}, \\ &J_2\ddot{\varphi}_2 = M_2 - \lambda, \\ &U_{21}\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

(8) теңдеуден φ_2 және λ шығару арқалы тәуелсіз жалпылама координат φ_1 арқалы өрнектеуге болады. Ол үшін (8) теңдеулер жүйесінің үшінші теңдеуін дифференциалдаймыз:

$$\dot{U}_{21}\dot{\varphi}_1 + U_{21}\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = 0,$$
$$\ddot{\varphi}_2 = \dot{U}_{21}\dot{\varphi}_1 + U_{21}\ddot{\varphi}_1.$$

Соңғы өрнекті (8)-тің екінші теңдеуіне қойсақ:

$$J_1\ddot{\varphi}_1 = M_1 + \lambda U_{21}$$
$$J_1\left(\dot{U}_{21}\dot{\varphi}_1 + U_{21}\ddot{\varphi}_1\right) = M_2 - \lambda$$

Осы екі теңдеуден λ шығарайық:

$$\lambda = M_2 - J_2(\dot{U}_{21}\dot{\varphi}_1 + U_{21}\ddot{\varphi}_1)$$
$$J_1\ddot{\varphi}_1 = M_1 + U_{21}[M_2 - J_2(\dot{U}_{21}\dot{\varphi}_1 + U_{21}\ddot{\varphi}_1)$$
$$J_1\ddot{\varphi}_1 + U_{21}J_2U_{21}\ddot{\varphi}_1 + U_{21}J_2\dot{U}_{21}\dot{\varphi}_1 = M_1 + U_{21}M_2$$
$$(J_1 + U_{21}^2J_2)\ddot{\varphi}_1 + J_2U_{21}\dot{U}_{21}\dot{\varphi}_1 = M_1 + U_{21}M_2 \quad (9)$$

(9) дифференциалдық теңдеуінің шешімі $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ функциясын береді. φ_2 жалпылама координатасын (4) голономды емес байланыс теңдеуінен таба аламыз немесе механизм қозғалысының теңдеуіненде табуға

болады. (8) теңдеулер жүйесінен φ_2 жалпылама координатасына тәуелді теңдеудіде алуға болады. Ол үшін жоғарыдай түрлендірулер жүргіземіз:

$$(J_2 + J_1 U_{12}^2)\ddot{\varphi}_2 + J_1 \dot{U_{12}} U_{12}\dot{\varphi}_1 = M_1 U_{12} + M_2 \quad (10)$$

Енді осы теңдеулерді Лагранждың екінші ретті теңдеуі арқалы алуға болатынын көрсетейік. Жалпылама координат ретінде φ_1 алайық. Бірінші тиекке келтірілген күш моментін элементар жұмыстар теңдігі шартынан аламыз, яғни

$$M_{k_1}\dot{\varphi}_1 = M_1\dot{\varphi}_1 + M_2\dot{\varphi}_2 \quad (11)$$

(5) қатынасын ескере отырып, (11) теңдеуінен

$$M_{k_1} = M_1 + M_2\frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_1} = M_1 + U_{21}M_2.$$

φ_1 жалпылама координатасы үшін Лагранждың екінші ретті теңдеуі бұл жағдайда келесі түрде жазылады

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = M_1 + \ U_{21}M_2, \quad (12)$$

Голономды емес байланыстар үшін (5) қатнасын ескерсек механизмнің кинетикалық энергиясы

$$T = \frac{1}{2}(J_1\dot{\varphi}_1^2 + J_2U_{21}^2\dot{\varphi}_2^2) \quad (13)$$

(13) теңдеуді (12) қойып, қажетті дифференциалдауды жүргізіп, келесі өрнектеуді аламыз:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = J_1\dot{\varphi}_1 + J_2U_{21}^2\dot{\varphi}_1; \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = J_1\ddot{\varphi}_1 + 2J_2U_{21}\dot{U}_{21}\dot{\varphi}_1 + J_2U_{21}^2\ddot{\varphi}_1, \quad (15)$$

(15) теңдіктерді (13) қойсақ φ_1 жалпылама координатасына тәуелді екінші ретті дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$(J_1 + U_{21}^2J_2)\ddot{\varphi}_1 + 2J_2U_{21}\dot{U}_{21}\dot{\varphi}_1 = M_1 + \ U_{21}M_2 \quad (16)$$

Жоғарыда алынған (10) дифференциалдың теңдеумен (16) теңдеуді салыстырсақ, Лагранждың екінші ретті теңдеуінің көмегімен алынған теңдеуін сол жағындағы мүшесі 2 есеге көбейген яғни есептеу кезінде үлкен қателіктерге әкелетінін көреміз. Сондықтан, бұл жерде айта кетуіміз керек, Лагранждың теңдеуін қолданғанда анықталмаған көбейткіштерді ескеруіміздің керек екендігі.

Сонымен қатар, анықталмаған көбейткіштермен Лагранждың екінші ретті теңдеуін сызықсыз голономды емес бірінші ретті байланыстар үшінде қолдануға болады [4]. Бұл теңдеулер негізінен ашық түрде берілмейді, яғни келесі түрде беріледі

$$\varphi_k = (q_1, \dot{q}_1, t) \qquad (k = 1,2,3, \dots, m)$$

Сызықсыз байланыстарда (3) теңдеудегі A_{1i}, A_{2i}, A_{3i},…, A_{mi} коэффициенттері $\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i}$ қатнасымен алмастыру керек. Анықталмаған көбейткіштермен берілетін Лагранждың теңдеуін тек голономды емес байланыстар үшін ғана емес, голономды жүйелер үшін де қолдануға болады [2].

Бір жағынан, голономды емес байланыстағы механизмдермен қозғалысының теңдеулерін құруда анықталмаған көбейткіштермен берілетін Лагранж теңдеуін қолдануда, жоғарыда байқағанымыздай теңдеулер жүйесін шешуге тура келеді. Бұл теңдеулердің саны еркіндік дәрежесі санынан голономды емес байланыстар теңдеуін екі еселенген теңдеуімен асады. Сондықтан голономды емес байланыстағы механикалық жүйелердің динамикасын зерттеуде кейбір дифференциалдық теңдеулер ұсынылған. Олардың қолданысы теңдеулер жүйесінің саны азайтуға әкеледі. Бұл жерде Аппельдің теңджеулерін құруда голономды емес байланыстар теңдеулерінде q_α жалпылама координатттарының туындылары теңдеулердің сол жағында жазылады:

$$\dot{q}_\alpha = \sum_{i=1}^{S-m} b_{\alpha i}\dot{q}_i + b_\alpha, \quad (\alpha = S-m+1, \dots, S) \tag{17}$$

мұндағы $(S-m)$ –жалпылама координаттар саны.

Аппель теңдеулері тәуелсіз жалпылама координаттар үшін ғана құрылады және олардың саны еркіндік дәрежесінің саны $(S-m)$-ге тең.

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i + \sum_{\alpha=S-m+1}^{S} Q_\alpha b_{\alpha i}, (i = 1,2, \dots, S-m) \tag{18}$$

мұндағы S –үдеулер энергиясы, Q_i, $Q_\alpha - q_i$-және q_α координаттарына сәйкес жалпылама күштер.

Бірігіп шешілетін Аппель теңдеулерінің жалпы саны байланыстар теңдеуінің санына тең, яғни $S-m+m = S$.

Үдеулер энергиясының функциясы S келесі түрде беріледі

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\nu}^{3N} m_\nu \ddot{x}_\nu^2 \tag{19}$$

Жалпылама жағдайда (19) формуласын массасы m_ν және координаталары x_ν тең N материалдық бөлшектер үшін деп қарастыру керек.

Мысалы қозғалмайтын остерді айнала қозғалатын тиектер үшін үдеулер энергиясы келесі түрде өрнектеледі:

$$S = \frac{J\ddot{\varphi}^2}{2} + \frac{J\dot{\varphi}^4}{2} \tag{20}$$

Енді осы Аппель ұсынған теңдеуді жоғарыдағы сатылы емес фрикциялық берілiспен жұмыс істейтін механизм үшін қарастырайық. Бұл жерде жалпылама координат ретінде φ_1 аламыз:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}_1} = M_1 + M_2 U_{21}, \tag{21}$$

мұндағы S-үдеу энергиясы.

Егер S функциясын ашып жазатын болсақ, ол күрделі болып келеді, сондықтан біз тек $\ddot{\varphi}_1$ үдеуін қамтитын бөлігін аламыз. Ол келесі функция түрінде жазылады:

$$S = \frac{1}{2}(J_1\ddot{\varphi}_1^2 + J_2\ddot{\varphi}_2^2), \tag{22}$$

(22)-ші өрнекті (21) қойсақ

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(J_1\ddot{\varphi}_1^2+J_2\ddot{\varphi}_2^2)}{\partial\ddot{\varphi}_1}=M_1+M_2U_{21} \qquad (23)$$
$$U_{21}\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2=0$$

(23) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің екінші теңдеуін дифференциалдасақ келесі теңдеуді аламыз:

$$\dot{U}_{21}\dot{\varphi}_1+U_{21}\ddot{\varphi}_1-\ddot{\varphi}_2=0 \qquad (24)$$

Бұдан

$$\ddot{\varphi}_2=\dot{U}_{21}\dot{\varphi}_1+U_{21}\ddot{\varphi}_1 \qquad (25)$$

(25)-ші өрнекті (24) теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеуіне қойып, $\ddot{\varphi}_1$ бойынша дифференциалдайық.

$$\frac{1}{2}\frac{J_1\ddot{\varphi}_1^2+J_2(\dot{U}_{21}^2\dot{\varphi}_1^2+2\dot{U}_{21}\dot{\varphi}_1U_{21}\ddot{\varphi}_1+U_{21}^2\ddot{\varphi}_1^2)}{\partial\ddot{\varphi}_1}==M_1+M_2U_{21}$$
$$\frac{1}{2}\left(2J_1\ddot{\varphi}_1+2J_2\dot{U}_{21}U_{21}\dot{\varphi}_1+2J_2U_{21}^2\ddot{\varphi}_1\right)=M_1+M_2U_{21}$$
$$(J_1+J_2U_{21}^2)\ddot{\varphi}_1+J_2\dot{U}_{21}U_{21}\dot{\varphi}_1=M_1+U_{21}M_2 \qquad (26)$$

Нәтижесінде (26) екінші ретті дифференциалдық теңдеудің (16) теңдеуімен бірдей екенін көреміз.

Әдебиеттер тізімі

1. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин [Текст] / И.И. Артоболевский. - М.: Наука, 1975. – 638 с.
2. Фролов, К.В. Теория механизм и машин [Текст] / К.И. Фролов [и др.]. - М.: Наука, 1984. – 493 с.

Материал редакцияға 13.03.21 түсті.

А.Т. Жақаш, Р.Ж. Абдраимов, Э.А. Джакашова

Таразский региональный университет им. М.Х. Дулати, г. Тараз, Казахстан

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ С НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

Аннотация. Составление математической модели движения механизмов при неголономных связях гораздо сложнее, чем при гологномных связях. При этом для составления уравнений движения механизма с неголономными связями нельзя использовать обычные уравнения Лагранжа второго рода, а следует применять уравнение Лагранжа с неопределнными множителями. При этом общее число уравнений получится больше, чем число степеней свободы.

Ключевые слова: механизмы, неголономные связи, степень свободы механизма, кинетическая энергия, момент инерции, приведенные массы, приведенная сила, уравнение Лагранжа с неопределнными множителями.

A.T. Zhakash, R.J. Abdraimov, E. Jakashova

Taraz Regional University named after M.Kh. Dulaty, Taraz, Kazakhstan

EQUATIONS OF MOTION OF MECHANISMS WITH NON-LONOMIC CONNECTIONS

Abstract. Compilation of a mathematical model of the movement of mechanisms with nonholonomic connections is much more difficult than with hologomic connections. In this case, to compose the equations of motion of a mechanism with nonholonomic constraints, the usual Lagrange equations of the second kind cannot be used, but the Lagrange equation with indefinite factors should be used. In this case, the total number of equations will be greater than the number of degrees of freedom.

Keywords: mechanisms, nonholonomic constraints, degree of freedom of a mechanism, kinetic energy, moment of inertia, reduced masses, reduced force, Lagrange equation with indefinite factors.

References

1. Artobolevsky I.I. Theory of mechanisms and machines. - Moscow: Science. 1975. - 638 p. [in Russian].
2. Frolov K.V. Theory of mechanism and machines. - Moscow: Nauka. 1984. - 493 p. [in Russian].